МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ТАВРІЙСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ В. І. ВЕРНАДСЬКОГО
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ МУНІЦИПАЛЬНОГО УПРАВЛІННЯ ТА МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА
Кафедра інженерних систем та технологій

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ

ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА В ПСИХОЛОГІЇ

Короткий конспект лекцій

Рекомендовано для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

за освітньою програмою «Психологія»

Київ 2026

УКЛАДАЧІ: к.т.н., доцент, Н.В. Омецинська,
доктор філософії, асистент Т.В. Юсипів

РЕЦЕНЗЕНТ: Медведєв М.Г., доктор технічних наук, професор Таврійського національного університету імені В.І. Вернадського

Розглянуто та схвалено на засіданні кафедри інженерних систем та технологій
Протокол № 9 від 6 січня 2026р.
Завідувач кафедри ________________ Наталія ОМЕЦИНСЬКА

Розглянуто та схвалено на засіданні навчально-методичної
ради навчально-наукового інституту муніципального управління
та міського господарства
Протокол №3 від 12.01.2026р.
Голова НМР ______________ Володимир КИСЕЛЬОВ

Кроткий конспект лекцій призначений для формування у здобувачів базових теоретичних знань та практичних навичок з математичних методів та математичної статистики, оволодіння математичним апаратом, необхідним для освоєння інших спеціальних дисциплін. Містить навчальні матеріали з основних тем курсу «**Математичні методи та математична статистика в психології** ».

Вступ

Аналіз даних у гуманітарних дослідження – необхідна складова будь-якого наукового пошуку. Знайти відповідь на поставлене емпіричне питання – складний шлях, який вимагає відповідної підготовки, знань та навичок від дослідника. Не є виключенням і психологія. Незважаючи на гуманітарне підґрунтя, психологічна науки не може розвиватися без використання відповідних методів та методології. До таких методів, що мають використовуватись у психологічних дослідженнях, відносяться методи математичної статистики. Оскільки саме за результатами, які надають статистичні методи, дослідник підтверджує висунути гіпотезу, або відхиляє її.

Статистика для психологів– важлива та необхідна умова якісного дослідження. Розуміння психологом доречності використання того або іншого методу математичної статистики є показником професійності, засвідчує рівень підготовки спеціаліста.

Звернення до студентів

Статистика – досить поширене слово, яке використовується у різних сферах людської діяльності та поєднує в собі хоч і близькі, проте різні поняття. Загалом слово «статистика» означає дисципліну, яка займається збором, упорядкуванням, аналізом, інтерпретацією та представленням даних, тобто всім тим, що супроводжує повсякденну роботу психологів.

Американський психолог, засновник Гарвардської Психоакустичної лабораторії, автор популярного «Довідника з експериментальної психології» Стенлі Сміт Стівенс (*Stanley Smith Stevens*) так пише в своїй книзі: «Зрілість науки зазвичай вимірюється тим, наскільки вона послуговується математикою». Головною перевагою використання математики в галузях, де переважає описовий стиль викладення матеріалу (як-то психологія), є можливість виміряти досліджуваний предмет. Статистика, яка цілком базується на математиці, обґрунтовує та вказує на методи здійснення таких вимірів.

Отже під час вивчення цієї дисципліни Ви маєте:

- ✓ оволодіти методами побудови та реалізації аналізу даних за допомогою прикладних програмних продуктів;

- ✓ набути практичних навичок кількісного вимірювання взаємозв'язків між показниками;
- ✓ поглибити теоретичні знання й практичні навички в галузі математичного моделювання психологічних процесів і явищ;
- ✓ здобути знання про застосування математичних моделей в психологічних дослідженнях.

Бажаємо успіхів у опануванні дисципліни!

Зміст

Тема: Первинні описові статистики

Сукупність предметів або явищ, об'єднаних деякою загальною ознакою або властивістю якісного чи кількісного характеру, називають ***об'єктом спостереження***.

Кожний об'єкт статистичного спостереження складається з окремих елементів – ***одиниць спостереження***.

Результати статистичного спостереження являють собою числову інформацію – дані. ***Статистичні дані*** – це відомості про те, якого значення набула у статистичній сукупності досліджувана ознака, що вивчається. Ознаки бувають кількісними і якісними.

Кількісною називають ознаку, значення якої виражається числом (темп приросту, вік, стаж роботи, вартість основних фондів, маса і т. д.).

Якісною називають ознаку, яка характеризується деякою властивістю або станом елементів сукупності (стать, ґатунок, професія, освіта і т. д.).

Статистична сукупність називається ***генеральною***, якщо дослідженню підлягають всі елементи сукупності (суцільне спостереження).

Частину елементів генеральної сукупності, яка підлягає дослідженню, називається ***вибірковою сукупністю (вибіркою)***. Для того, щоб вибіркова сукупність відображала найбільш важливі властивості генеральної сукупності, вибірка має бути ***репрезентативною (представницькою)***. В різних галузях виробництва напрацьовані свої методи встановлення репрезентативності вибірки.

Значення ознаки, які при переході від одного елемента сукупності до іншого змінюються (варіюють), називають ***варіантами*** і, як правило, позначаються маленькими літерами латинського алфавіту x, y, z.

Порядковий номер варіанти (значення ознаки) називається ***рангом***.

Ряд значень ознаки (варіант), розміщених у порядку зростання з відповідними їм вагами, називають ***варіаційним рядом*** (рядом розподілу).

В якості ваг виступають частоти або відносні частоти.

Частота (n_i) показує, скільки разів зустрічається та чи інша варіанта (значення ознаки) в статистичній сукупності.

Відносна частота (w_i) показує, яку частину одиниць сукупності становить та чи інша варіанта. Відносну частоту розраховують як відношення частоти тієї чи іншої варіанти до суми всіх частот ряду

$$w_i = \frac{n_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i}.$$

Сума всіх відносних частот дорівнює 1: $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.

Варіаційний ряд є статистичним аналогом розподілу ознаки (випадкової величини X). Варіаційні ряди бувають дискретними та інтервальними.

Дискретні варіаційні ряди будують, як правило, в тих випадках, коли значення досліджуваної ознаки можуть відрізнятись одне від одного не менше ніж на деяку скінченну величину. В дискретних варіаційних рядах задаються точкові значення ознаки. Загальний вигляд дискретного варіаційного ряду:

Значення ознаки (x_i)	x_1	x_2	...	x_n
Частоти (n_i)	n_1	n_2	...	n_n

Інтервальні варіаційні ряди будують, як правило, в тих випадках, коли значення досліджуваної ознаки можуть відрізнятись одне від одного на скільки завгодно малу величину. Значення ознаки в цих випадках задаються у вигляді інтервалів. Загальний вигляд інтервального варіаційного ряду:

Значення ознаки (x_i)	$(x_1; x_2)$	$(x_2; x_3)$	...	$(x_{n-1}; x_n)$
Частоти (n_i)	n_1	n_2	...	n_n

В інтервальних варіаційних рядах в кожному інтервалі виділяють верхню та нижню межі. Різницю між верхньою та нижньою межами називають ***шириною інтервалу***. Іноді інтервал може не мати верхньої або нижньої межі (це, як правило, перший і останній). Такі інтервали називають ***відкритими***.

Наприклад перший інтервал може бути задано як „до 20”, другий – „(20 ; 30)”, ..., передостанній – „(90; 100)”, останній – „100 і більше”. Якщо ж є обидві межі інтервалу, то його називають ***закритим***. Часто відкриті інтервали доводиться умовно закривати. Так, ширину першого інтервалу приймають рівною ширині другого інтервалу, а ширину останнього – ширині передостаннього інтервалу. В нашому прикладі ширина другого інтервалу рівна 30 – 20 = 10, отже, нижня межа першого інтервалу умовно становить 20 – 10 = 10; ширина передостаннього рівна 100 – 90 = 10, отже, верхня межа останнього інтервалу умовно становить 100 + 10 =110. Крім того, в інтервальних варіаційних рядах можуть зустрічатись інтервали різної ширини. Якщо інтервали варіаційного ряду мають однакову ширину, то їх називають ***рівновеликими***, інакше – ***нерівновеликими***.

При побудові інтервального варіаційного ряду часто постає проблема вибору кількості інтервалів та ширини інтервалу. Кількість інтервалів має бути не дуже великою, щоб після групування ряд не був громіздким, і не дуже малою, щоб не загубити особливостей розподілу ознаки. Для визначення оптимальної кількості інтервалів застосовують або формулу Стерджеса $k = 1 + 3.322 \cdot \lg n$ або формулу $k = [4 \lg n + 1]$, де n – кількість елементів сукупності. Тоді ширину рівновеликих інтервалів визначають за формулою: $h = \frac{x_{max} - x_{min}}{k}$, де x_{max} та x_{min} - відповідно найбільше та найменше значення варіант ряду.

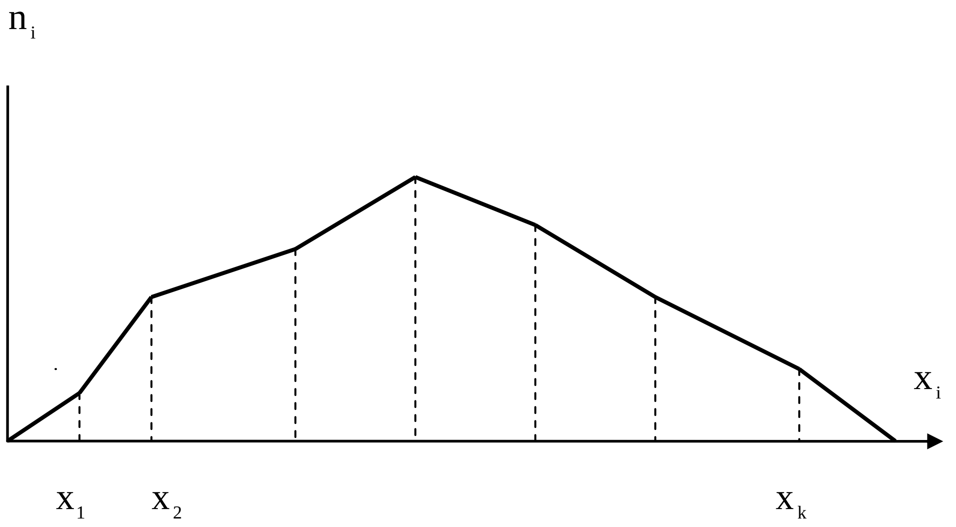
Для характеристики варіаційного ряду поруч з частотами та відносними частотами використовують накопичені частоти та відносні частоти. Накопичені частоти (відносні частоти) показують, скільки елементів сукупності (яка їх частина) не перевищують заданого значення (варіанти) x.

Їх можна розраховувати за даними дискретного ряду, використовуючи формулу

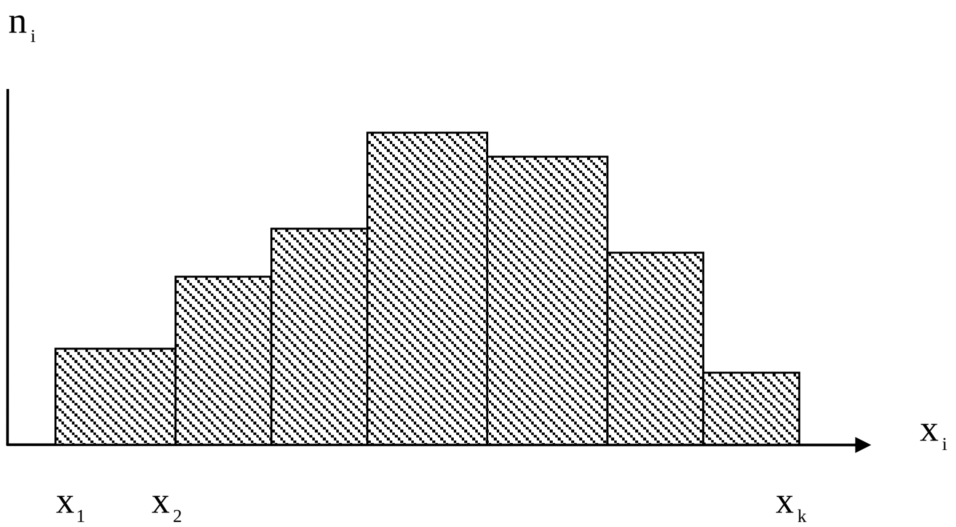
$$f_i = n_i + n_{i-1} + ... + n_1 .$$

Для інтервального варіаційного ряду – це сума частот (відносних частот) всіх інтервалів, що не перевищують даний.

Дискретний варіаційний ряд графічно можна представляти за допомогою ***полігона розподілу частот або відносних частот***.



Інтервальні варіаційні ряди графічно можна представляти за допомогою ***гістограми***.



При її побудові по осі абсцис відкладаються значення досліджуваної ознаки (межі інтервалів). Якщо інтервали рівновеликі, то по осі ординат можна відкладати частоти або відносні частоти. Якщо ж інтервали мають різну ширину, по осі ординат необхідно відкладати значення абсолютної або відносної щільності розподілу. ***Абсолютна щільність*** – відношення частоти інтервалу до його ширини:

$$\rho(a)_i = \frac{n_i}{h_i},$$

де $\rho(a)_i$ - абсолютна щільність і – го інтервалу;

n_i - його частота;

h_i - ширина інтервалу.

Абсолютна щільність показує, скільки одиниць сукупності припадає на одиницю інтервалу.

Відносна щільність – відношення відносної частоти інтервалу до його ширини:

$$\rho(в)_i = \frac{w_i}{h_i},$$

де $\rho(в)_i$ - відносна щільність і – го інтервалу;

w_i - частість інтервалу;

h_i - ширина інтервалу.

Відносна щільність показує, яка частина елементів сукупності припадає на одиницю інтервалу.

Дискретні та інтервальні варіаційні ряди графічно можна представити також у вигляді *комуляти* та *огіви*. При побудові комуляти за даними дискретного ряду по осі абсцис відкладають значення ознаки (варіанти), а по осі ординат накопичені частоти або відносної частоти. На перетині значень ознаки (варіант) і відповідних їм накопичених частот (відносних частот) будуються точки, які в свою чергу з’єднуються відрізками або кривою. Отримана таким чином ламана (крива) називається ***комулятою***. Якщо ряд інтервальний, то абсцисами її точок є верхні межі інтервалів. Ординати утворюють накопичені частоти (відносні частоти) відповідних інтервалів. Часто додають ще одну точку, абсцисою якої є нижня межа першого інтервалу, а ордината рівна нулю. З’єднуючи точки відрізками або кривою, отримаємо комуляту.

Огіва будується аналогічно комуляті з тією тільки різницею, що на осі абсцис відкладаються точки, що відповідають накопиченим частотам (відносним частотам), а по осі ординат – значення ознаки (варіанти).

Розглянемо деякі числові характеристики варіаційних рядів.

Середня арифметична. Існує дві формули розрахунку середньої арифметичної: проста та зважена. Просту середню арифметичну зазвичай використовують, коли дані спостереження не зведені у варіаційний ряд або всі частоти рівні одиниці чи однакові:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n},$$

де x_i - i –е значення ознаки або середина і–го інтервалу для інтервального ряду; n – об'єм ряду (кількість спостережень; кількість значень ознаки).

Якщо частоти відмінні одна від одної, розрахунок проводять за формулою *середньої арифметичної зваженої:*

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot m_i}{\sum_{i=1}^{k} m_i},$$

де x_i - i –е значення ознаки або середина і–го інтервалу для інтервального ряду; m_i –частота і–го значення ознаки; k – кількість різних значень ознаки (варіант).

При розрахунку середньої арифметичної вагами можуть виступати і відносні частоти, тоді формула розрахунку *середньої арифметичної зваженої* набуде вигляду:

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot w_i,$$

де x_i – i -е значення ознаки або середина і–го інтервалу для інтервального ряду; w_i – відносна частота і-го значення ознаки; n – кількість значень ознаки (варіантів).

Медіана **Me(X).** Медіаною варіаційного ряду називають таке значення ознаки, яке припадає на середину ранжируваного ряду. Якщо кількість варіант непарна, то матимемо одне серединне значення, рівне медіані $Me(X) = x_g$; а якщо кількість варіант парна, то на середину припадуть два значення варіант, і тоді медіана буде рівною їх середньому арифметичному

$$Me(X) = \frac{x_g + x_{g+1}}{2}.$$

Для інтервального варіаційного ряду спочатку знаходять медіанний інтервал (інтервал, який містить серединне значення ознаки), а медіана на ньому визначається за формулою:

$$Me(X) = x_0 + h \cdot \frac{\frac{n}{2} - f_{me-1}}{n_{me}},$$

де x_0 - початок медіанного інтервалу; h – ширина медіанного інтервалу; n – сума всіх частот ряду або об'єм ряду; f_{me-1} – частота, накопичена до початку медіанного інтервалу; n_{me} – частота медіанного інтервалу.

Мода **Mo(X).** Модою для дискретного варіаційного ряду називають таке значення варіанти, що має найбільшу частоту. Для інтервального варіаційного ряду спочатку знаходять модальний інтервал (з найбільшою частотою), а моду на ньому визначають за формулою:

$$Mo(X) = x_0 + h \cdot \frac{n_{mo} - n_{mo-1}}{2n_{mo} - n_{mo-1} - n_{mo+1}},$$

де x_0 - початок модального інтервалу; h – ширина модального інтервалу; n_{mo-1} – частота інтервалу, що передує модальному; n_{mo+1} – частота наступного за модальним інтервалу; n_{mo} – частота модального інтервалу.

Мод може бути кілька. Коли дискретний варіаційний ряд має одну моду, то його називають одномодальним, коли має дві моди – двомодальним і т.д.

Коливніть досліджуваної ознаки можна охарактеризувати за допомогою різних показників варіації. До основних ***показників варіації*** відносять: дисперсію, середнє квадратичне відхилення, коефіцієнт варіації.

Дисперсія $D(X)$**.** Дисперсію можна розрахувати за простою і зваженою формулами:

$$D(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n};$$

$$D(X) = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 \cdot m_i}{\sum_{i=1}^{k} m_i}.$$

Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$. Середнє квадратичне відхилення розраховується за формулою

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Коефіцієнт варіації $V(X)$**.** Коефіцієнт варіації визначається за формулою

$$V(X) = \frac{\sigma(X)}{\bar{x}} \cdot 100\%.$$

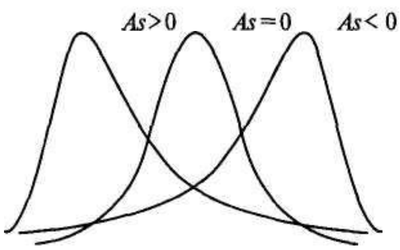
Коефіцієнт асиметрії A_s^* – міра відхилення графіка розподілу частот від симетричного вигляду відносно середнього значення.

Розраховується за формулою:

$$A_s = \frac{\sum(x_i - X_{ср})^3}{n\sigma^3},$$

де $X_{ср}$ – середне значення ознаки

Асиметрія характеризує міру асиметричності розподілу. Коефіцієнт асиметрії змінюється від мінус до плюс нескінченність ($-\infty < As < +\infty$), для симетричних розподілів As=0.

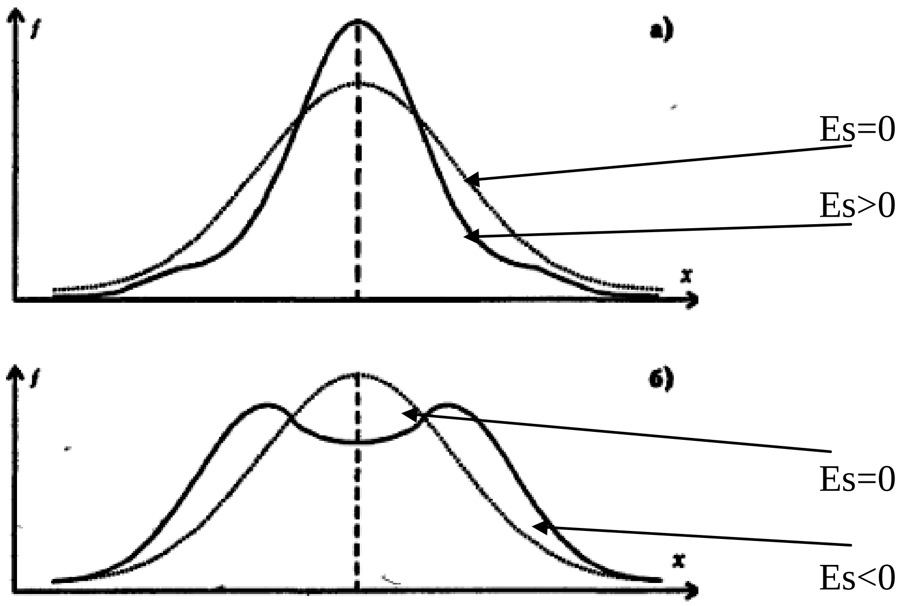


Якщо частіше зустрічаються значення менше середнього, то говорять про лівобічну, або позитивну асиметрію (As > 0). Якщо ж частіше зустрічаються значення більше середнього, то асиметрія - правостороння, або негативна (As<0). Чим більше відхилення від нуля, тим більше асиметрія.

Ексцес E_k – міра плосковершинності або гостроти графіка . Коефіцієнт ексцесу (Ex), що розраховується по формулі:

$$E_x = \frac{\sum(x_i - X_{\text{ср}})^4}{n\sigma^4} - 3$$

Коефіцієнт ексцесу також змінюється від мінус до плюс нескінченність (-∞<Ex<+∞), *Ex=0 для нормального розподілу.*



Отже, ексцес рівний нулю Es=0 для нормального закону розподілу. Якщо ексцес додатній Es>0 то на графіку функція розподілу має гостру вершину і для від'ємних значень Es<0 більш пологу. В такий спосіб можна встановити відхилення заданого закону від нормального.

Тема: Нормальний закон розподілу випадкової величини

Розподілом ознаки називається закономірність зустрічі різних його значень. У психологічних дослідженнях найчастіше посилаються на нормальний розподіл. Нормальний розподіл характеризується тим, що крайні значення ознаки в нім зустрічаються досить рідко, а значення, близькі до середньої величини, – досить часто. Нормальним такий розподіл називається тому, що він дуже часто зустрічалося в природничо - наукових дослідженнях і є "нормою" масового випадкового прояву ознаки. Цей розподіл слідує закону, відкритому трьома вченими в різний час: Муавром в 1733 р. в Англії, Гаусом в 1809 р. в Германії і Лапласом в 1812 р.

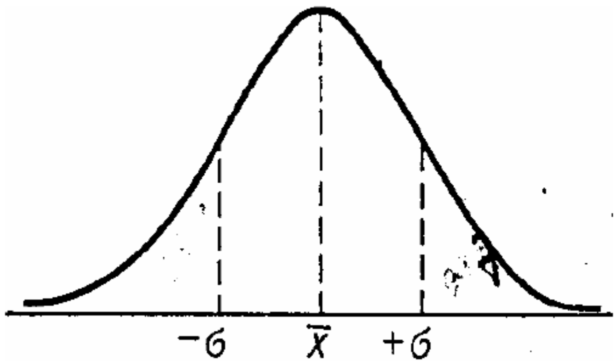


Рис.1. Крива нормального розподілу

Нормальний розподіл виражається наступною формулою:

$$f_{\text{від}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - x_{\text{ср}})^2}{2\sigma^2}},$$

де $f_{від}$. – відносні частоти появи кожного конкретного значення випадковою величини x_i. Передбачається, що змінна x_i, може приймати нескінченно великі і нескінченно малі значення, кількість вимірів безконечна.

Будь який розподіл характеризується **параметрами розподілу** – це його числові характеристики. Найбільш практично важливими параметрами є середнє значення $X_{ср}$, дисперсія (D), стандартне відхилення (σ), показники асиметрії і ексцесу.

Про що ж свідчить стандартне відхилення? Воно дозволяє сказати, що більша частина досліджуваної вибірки розташовується в межах σ від середньої. Що це означає? Статистики показали, що при нормальному розподілі «більша частина» результатів, розташована в межах одного стандартного відхилення по дві сторони від середньої, і в процентному відношенні завжди однакова і не залежить від величини стандартного відхилення: вона відповідає 68% елементів (тобто 34% її елемента розташовується зліва і 34%- справа від середньої):

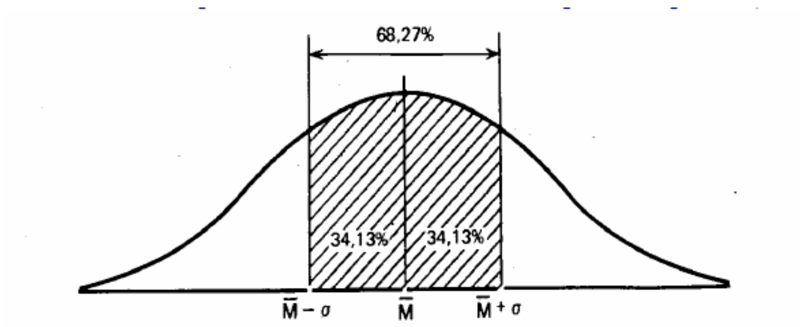


Рис. 2. Крива нормального розподілу

Так само розрахували, що 94,45% елементів популяції при нормальному розподілі не виходить за межі двох стандартних відхилень від середньої:

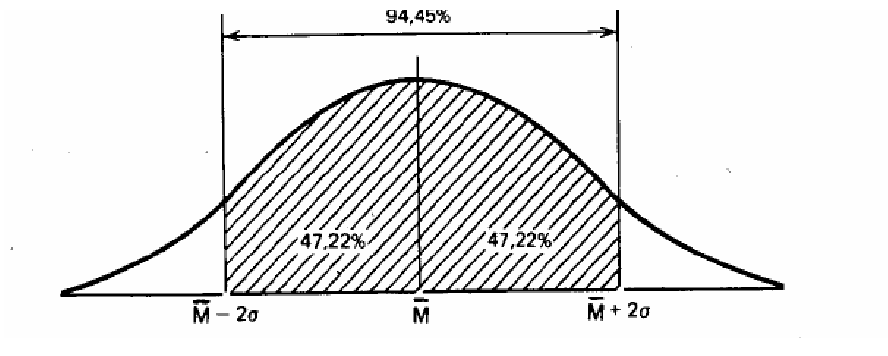


Рис. 3. Крива нормального розподілу

В межах трьох стандартних відхилень вміщається майже вся популяція - 99,73%.

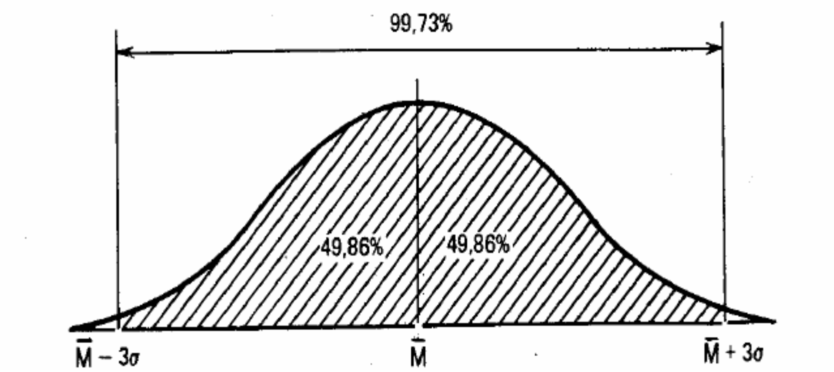


Рис.4. Крива нормального розподілу

Перевірка нормальності розподілу результативної ознаки

Нормальність розподілу результативної ознаки можна перевірити:

1. Для нормального розподілу характерно співпадіння середньої арифметичної величини, моди і медіани.

2. Можна перевірити нормальність шляхом розрахунку показників асиметрії і ексцесу і зіставлення їх з критичними значеннями (Пустильник Е.І., 1968, Плохинський Н.А. 1970 та ін.). Розглянемо метод Е.І. Пустильника на прикладі.

Діяти будемо за наступним алгоритмом:

1) розрахуємо критичні значення показників асиметрії і ексцесу за формулами Е.І. Пустильника і зіставимо з ними емпіричні значення;

2) якщо емпіричні значення показників виявляться нижчими критичних, зробимо висновок про те, що розподіл ознаки не відрізняється від нормального.

Розрахунок емпіричних показників асиметрії і ексцесу проведемо за формулами:

$$A_s = \frac{\sum(x_i - \text{Хср})^3}{n\sigma^3}$$

$$E_x = \frac{\sum(x_i - \text{Х}_{\text{ср}})^4}{n\sigma^4} - 3$$

Розрахуємо критичні значення показників асиметрії і ексцесу за формулами Е.І. Пустильника:

$$A_{\text{кр}} = 3\sqrt{\frac{6(n-1)}{(n+1)(n+3)}}$$

$$E_{\text{кр}} = 5\sqrt{\frac{24 * n * (n-2) * (n-3)}{(n+1)^2 * (n+3) * (n+5)}}$$

n -кількість спостережень

$$A_{\text{емп}} < A_{\text{кр}},$$

$$E_{\text{емп}} < E_{\text{кр}},$$

Якщо емпіричні значення А і Е менше критичних значень, то можна зробити наступний висновок: розподіл результативної ознаки не відрізняється від нормального розподілу.

Тема: Аналіз зв'язку між змінними

У психологічних дослідженнях важливе місце посідає кореляційний аналіз. Саме використання даного виду статистичного аналізу дозволяє виявити зв'язки між змінними, які не можна «побачити» без застосування математичної статистики. Зауважимо, що при інтерпретації кореляції варто пам'ятати про те, що кореляційний зв'язок – це взаємозалежність між змінними. Тому при цьому виді дослідження ми не можемо стверджувати про причинно-наслідкову обумовленість змінних.

У психологічних дослідженнях важливе місце посідає кореляційний аналіз. Саме використання даного виду статистичного аналізу дозволяє виявити зв'язки між змінними, які не можна «побачити» без застосування математичної статистики. Зауважимо, що при інтерпретації кореляції варто пам'ятати про те, що кореляційний зв'язок – це взаємозалежність між змінними. Тому при цьому виді дослідження ми не можемо стверджувати про причинно-наслідкову обумовленість змінних.

Однак, перш ніж перейти до конкретного розгляду цього питання, слід з'ясувати деякі фундаментальні положення, які стосуються поняття зв'язку.

Зв'язок між змінними може бути двох типів – функціональний та статистичний.

Функціональний зв'язок – одному значенню однієї змінної відповідає лише одне значення іншої змінної. Прикладом цього зв'язку може бути будь-яка математична функція:

$$y = a + bx \,,$$

$$y = x^2$$

Графік функціонального зв'язку наведено на рисунку 1. зліва.

Статистичний зв'язок – одному значенню однієї змінної може відповідати декілька значень другої змінної.

Рис.1. Функціональний та статистичний зв’язки

Функціональний зв’язок є математично наближеним способом описання зв’язку між реальними процесами. Статистичний зв’язок відображає реальну картину цього зв’язку, однак, не дає можливості її узагальнення.

Коефіцієнт кореляції – параметр, який характеризує міру лінійного взаємозв'язку між двома вибірками

Коефіцієнт кореляції змінюється від (-1;1)

(-1;0) – (зворотна лінійна залежність)

(0;1) (пряма залежність).

Класифікація кореляційних зв'язків по їхній силі за модулем:

сильна або тісна при значеннях коефіцієнта кореляції r > 0,7;

середня при 0,5 < r < 0,69 ;

помірна при 0,3 < r < 0,49 ;

слабка при 0,2 < r < 0,29 ;

дуже слабка при r < 0,19.

Парна кореляція

У випадку підпорядкування емпіричних даних нормальному закону розподілу, кореляційний аналіз розподілу досліджуваних даних проводиться за допомогою коефіцієнта кореляції Пірсона (r_{xy}).

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}}$$

Коефіцієнт кореляції змінюється від (-1;0) – (зворотна лінійна залежність) (0;1) (пряма залежність).

Статичну значущість отриманих коефіцієнтів визначається відповідно до значення t, яке розраховується формулою

t- критерій Стьюдента

$$r_{\text{факт}} = \sqrt{\frac{r_{xy}^2}{1 - r_{xy}^2}(n-2)}$$

Якщо $r_{\text{факт}} > r_{\text{табл}}$, можна вважати коефіцієнт кореляції статистична достовірним.

Рангова кореляція

Поряд з параметричними показниками кореляційного зв'язку, якщо початкові дані не підпорядковуються нормальному закону розподілу, використовують непараметричні показники зв'язку – ранговий коефіцієнт кореляції Спірмена (ρ_{xy}), який було визначають за формулою:

$$\rho_{xy} = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2-1)} \tag{1}$$

де d – рангова різниця,

n – кількість пар варіант.

Оцінка кореляційного зв’язку проводиться з огляду на те, що значення коефіцієнту у межах від 1 до 0,7 відповідає сильному зв’язку, від 0,699 до 0,3 — помірному, а від 0,299 до 0 — слабкому зв’язку.

Помилка коефіцієнту кореляції, розрахованого за методом Спірмена, за формулою:

$$m_{\rho_{xy}} = \sqrt{\frac{1-\rho_{xy}{}^2}{n-2}} \tag{2}$$

Статичну значущість отриманих коефіцієнтів визначаємо відповідно до значення t, яке розраховується формулою

$$t = \frac{\rho_{xy}}{m_{\rho_{xy}}} \qquad (3)$$

Алгоритм кореляційного аналізу в гуманітарних дослідженнях:

1. Внести початкові дані у таблицю.
2. Зробити логічне припущення щодо наявності причинно-наслідкових зв'язків між досліджуваними ознаками X та Y.
3. Виконаємо ранжування початкових даних.
4. Обчислити коефіцієнт кореляції за формулою Спірмена.
5. Розрахувати *t*-критерій відповідно до отриманого результату.
6. Знайти критичне значення *t*-критерію, де рівень значущості α приймемо за 0,05, а кількість ступенів вільності $df=n-2$.
7. Порівняти розраховане і критичне значення коефіцієнту. Зробити висновки.

Бісеріальні коефіцієнти кореляції

Бісеріальні коефіцієнти кореляції оцінюють залежність двох ознак, одна з яких представлена в номінальній дихотомічній шкалі, а друга в шкалі порядку або в будь-якій кількісній шкалі. Нагадаємо, що змінна яка отримана в дихотомічній шкалі, приймає тільки два значення (коду) 0 і 1.

Точково-бісеріальний коефіцієнт кореляції r_{pb}

Точково-бісеріальний коефіцієнт кореляції r_{pb} використовується у випадку, коли одна змінна виміряна у дихотомічній номінальній шкалі, а друга – в шкалі інтервалів чи відношень. Емпіричне значення визначається за формулою:

$$r_{pb} = \frac{\overline{y_1} - \overline{y_0}}{\sigma_y} \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_0}{n \cdot (n-1)}}, \text{ де}$$

$\overline{y_1}$ – середнє арифметичне змінної У для об'єктів, що мають за X одиницю;

$\overline{y_0}$ – середнє арифметичне змінної У для об'єктів, що мають за X нуль;

σ_y – стандартне відхилення Y;

n_1 – кількість об’єктів за Х, які мають одиницю;

n_0 – кількість об’єктів за Х, які мають нуль;

n – обсяг вибірки.

Точково-бісеріальний коефіцієнт кореляції немає своєї таблиці для знаходження критичних значень. Оскільки статистика коефіцієнта кореляції має розподіл Стьюдента, то пошук критичних значень здійснюється за таблицею критичних значень критерію *t*-Стьюдента. Для обчислення емпіричного значення використовується формула:

$$t = |r_{pb}| \cdot \sqrt{\frac{n-2}{1-r_{pb}^2}}, \text{ де}$$

r_{pb} – емпіричне значення точково-бісеріального коефіцієнта кореляції

n – обсяг вибірки досліджуваних.

Якщо емпіричне значення *t* дорівнює або більше критичного значення для заданого α-рівня, то формулюється висновок, що коефіцієнт кореляції є статистично значущим.

Рангово-бісеріальний коефіцієнт кореляції r_{rb}

Рангово-бісеріальний коефіцієнт кореляції застосовується у випадку, коли одна змінна виміряна в дихотомічній номінальній шкалі, а друга шкалі порядку. Емпіричне значення визначається за формулою:

$$r_{pb} = \frac{\overline{(\overline{y_1} - \overline{y_0})}^2}{n}, \text{ де}$$

$\overline{y_1}$ – середній ранг змінної У для об’єктів, що мають за Х одиницю;

$\overline{y_0}$ – середній ранг змінної У для об’єктів, що мають за Х нуль;

n – обсяг вибірки .

Рангово-бісеріальний коефіцієнт кореляції немає своєї таблиці для знаходження критичних значень. Оскільки статистика коефіцієнта кореляції має розподіл Стьюдента, то пошук критичних значень здійснюється за таблицею критичних значень критерію *t*-Стьюдента. Для обчислення емпіричного значення використовується формула:

$$t = |r_{pb}| \cdot \sqrt{\frac{n-2}{1-r_{pb}^2}}$$

де r_{rb} – емпіричне значення рангово-бісеріального коефіцієнта кореляції;

n – обсяг вибірки.

Якщо емпіричне значення t дорівнює або більше критичного значення для заданого α-рівня, то H_0 відхиляється і формулюється висновок, що коефіцієнт кореляції статистично значуще відрізняється від нуля.

Критичні значення r_{xy}
(для рівнів значимості 0,05 та 0,01)[2]

N	0,05	0,01	N	0,05	0,01	N	0,05	0,01
10	0,63	0,77	21	0,43	0,55	32	0,35	0,45
11	0,60	0,74	22	0,42	0,54	33	0,34	0,44
12	0,58	0,71	23	0,41	0,53	34	0,34	0,44
13	0,55	0,68	24	0,40	0,52	35	0,33	0,43
14	0,53	0,66	25	0,40	0,51	36	0,33	0,42
15	0,51	0,64	26	0,39	0,50	37	0,32	0,42
16	0,50	0,62	27	0,38	0,49	38	0,32	0,41
17	0,48	0,61	28	0,37	0,48	39	0,31	0,41
18	0,47	0,59	29	0,37	0,47	40	0,31	0,40
19	0,46	0,58	30	0,36	0,46	41	0,31	0,40
20	0,44	0,56	31	0,36	0,46	42	0,30	0,39

Тема: Регресійний аналіз

Психологічне дослідження – це прагнення віднайти відповідь на питання, яке є важливим для науки, або є значущим для самого дослідника. Науковий пошук має чітку практичну задачу: дати відповідь на питання «що далі»? Це означає, що наукове дослідження має вміщувати прогностичну цінність. Одним із базових методів, який дає можливість «заглянути у майбутнє» та спрогнозувати зміни однієї змінної, спираючись на вихідні характеристики інших – є регресійний аналіз. Володіння навичками використання даного статистичного методу дозволяє психологам отримати важливу інформацію, яка може бути використана для покращення процесу навчання, виховання, професійного зростання особистості тощо.

Залежність між випадковими величинами X і Y називається стохастичною, якщо зі зміною однієї з них (наприклад, X) змінюється закон розподілу іншої (Y). Як приклади такої залежності наведемо залежність маси тіла людини (Y) від довжини її тіла (X), фізичної працездатності людини (Y) від частоти її серцевих скорочень (X) і т.д.

На практиці це використовується для прогнозу Y по X: якщо величиною, що безпосередньо спостерігається є лише компонента X випадкового вектора (наприклад, X – довжина стопи), то в якості прогнозованого значення Y (довжина тіла людини) береться умовне математичне очікування.

Рівняння називається рівнянням регресії між Y на X. Змінна X називається регресійною змінною або регресором. Графік функції називається лінією або кривої регресії.

Регресійний аналіз. Парна регресія

Найбільш простим є випадок, коли регресія Y на X парна і лінійна:

$$y(x) = a_0 + a_1 x \qquad (6.1)$$

тобто значення Y залежить від одного значення X, а рівнянням регресії є пряма лінія. При цьому a_0 – вільний член, а a_1 – коефіцієнт регресії.

Коефіцієнт регресії показує, на скільки одиниць в середньому змінюється змінна Y при зміні змінної X на одну одиницю. Крім того, коефіцієнт показує напрям прямої.

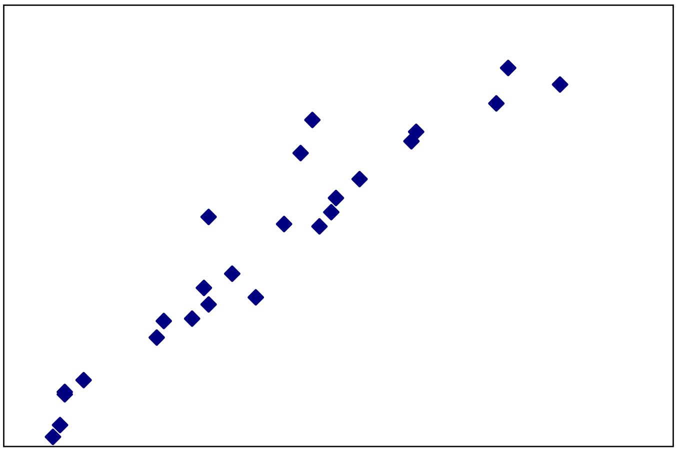
Для аналізу загальної якості рівняння регресії використовують коефіцієнт детермінації R^2, інакше квадрат коефіцієнта множинної кореляції. Коефіцієнт детермінації (міра визначеності) завжди знаходиться в межах інтервалу [0; 1]. Якщо значення R^2 близьке до одиниці, це означає, що побудована модель пояснює майже всю варіативність відповідних змінних. І навпаки, значення R^2 близьке до нуля, означає недостатню якість побудованої моделі.

Коефіцієнт детермінації R^2 показує, на скільки відсотків (R^2) 100% знайдена функція регресії описує зв'язок між вихідними значеннями Y і X.

Оцінка значущості рівняння регресії здійснюється за допомогою критерію Фішера. За умови справедливості нульової гіпотези критерій має розподіл Фішера з кількістю ступенів вільності $k_1 = p$, $k_2 = n - p - 1$ (для парної лінійної регресії p = 1). Якщо нульова гіпотеза відхиляється, то рівняння регресії вважається статистично значимим. Якщо нульова гіпотеза не відхиляється, то визнається статистична незначущість або ненадійність рівняння регресії.

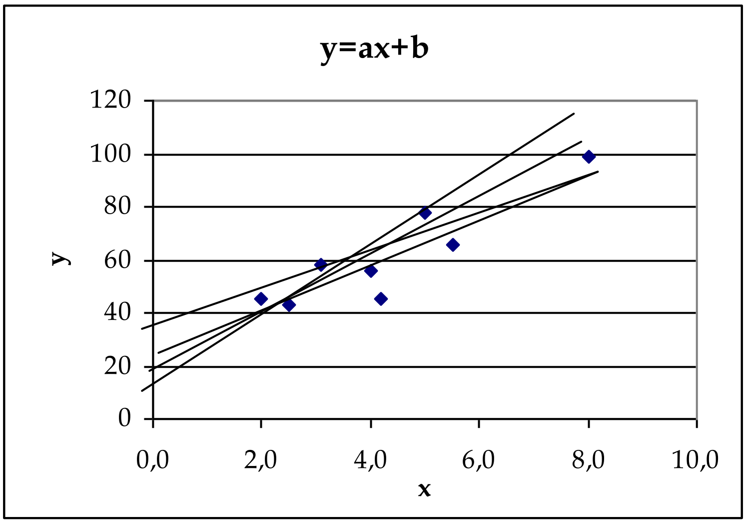
Нехай задана таблиця з двох колонок (X, Y) і m рядків, де колонка X містить значення незалежної величини (фактору), а колонка Y – значення залежної від X величини (результату). Ця таблиця є зафіксованим числовим «портретом» досліджуваного процесу.

За значеннями такої таблиці на площині у системі координат (X,Y) можна досить просто побудувати точкову (*Точечная*) діаграму, попередньо відсортувавши таблицю по стовпцю X. Якщо точки приблизно групуються навколо уявної **прямої лінії**, то лише тоді ми робимо висновок, що шукане рівняння регресії має форму **лінійного** рівняння у вигляді $\mathbf{y = a_0 + a_1x}$, це – парна або проста лінійна залежність результату Y від фактору X:



Точки «вишукувалися» навколо уявної прямої лінії

Будь-яке лінійне рівняння загального вигляду $y = a_0 + a_1x$ описує пряму лінію, яка уявно проходить повз m заданих точок, таких ліній можна провести безліч:



Серед них треба знайти лише одну таку лінію, яка б найкращим чином проходила проміж заданих точок.

Дослідникам у різних галузях науки, відомо, що класичним критерієм оцінки якості наближення є принцип методу найменших квадратів (МНК), за яким мінімізується сума квадратів відстаней (відхилень, помилок) між заданим (y_i) й обчисленим (теоретичним) значенням функції ($\tilde{y}_i$):

$$\sum_{i=1}^{m}\left(y_i - \tilde{y}_i\right)^2 \to \min \qquad (*)$$

або для парної лінійної регресії

$$\sum_{i=1}^{m}\left(y_i-\left(a_0+a_1x_i\right)\right)^2\rightarrow\min\quad(**)$$

де: $\tilde{y}_i = a_0 + a_1x_i$ – рівняння парної лінійної регресії, коефіцієнти a_0 та a_1 – шукані невідомі.

Таким чином, ставиться задача пошуку таких значень коефіцієнтів a_0, a_1 шуканого рівняння регресії $y = a_0 + a_1x$, за якими забезпечується мінімум визначеного виразу (**).

Для побудови рівняння регресії і для оцінки її параметрів використовують МНК (метод найменших квадратів). Для всіх типів рівнянь розв'язується система відносно a_0 та a_1.

$$\begin{cases} na_0 + a_1\sum x_i = \sum y_i \\ a_0\sum x_i + a_1\sum x_i^2 = \sum x_iy_i \end{cases}$$

Оцінку якості побудованої моделі дає коефіцієнт детермінації, а також середня похибка апроксимації.

Середня помилка апроксимації – середнє відхилення розрахункових значень від фактичних(експериментальних).

$$A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{y_i-\hat{y}_i}{y_i}\right|\times 100\% = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\varepsilon_i}{y_i}\right|\times 100\%$$

Чим менше розсіювання емпіричних точок навколо теоретичної лінії регресії, тим менше середня похибка апроксимації. Помилка апроксимації менше 7% свідчить про хорошу якість моделі.

Квадрат коефіцієнта кореляції називається коефіцієнтом ***детермінації***

$$d=r^2$$

Цей коефіцієнт є мірою визначення лінійної регресії: чим ближче значення коефіцієнт детермінації до одиниці , тим краще математична модель описує досліджуваний процес.

Значущість рівняння регресії можна оцінити за *F-тестом* він дає оцінку якості рівняння регресії. Для цього потрібно порівняти фактичне $F_{факт}$ и критичне $F_{крит}$ *(табличне)* значення *F- крітерія Фішера*

$$F_{\text{факт}} = \frac{r_{xy}^2}{1 - r_{xy}^2}(n-2)$$

n – кількість одиниць сукупності

Якщо $F_{факт} > F_{табл}$*, то* можна казати о статистичній значущості і надійності рівняння

Якщо $F_{факт} < F_{табл}$, то рівняння регресії вважається не надійним.

Тема: Статистичні гіпотези

До сьогоднішнього дня ми розглядали методи, які дозволяють визначити силу зв'язку між явищами, його значимість та форму. Сьогодні ми починаємо розділ, вивчення якого дозволить нам з'ясовувати також напрям цього зв'язку (аналізувати причинно-наслідкові зв'язки). Щоб відразу знати, що для чого використовувати, давайте побудуємо таблицю (табл.1):

Таблиця 1

ЗАДАЧІ	МЕТОДИ ВИРІШЕННЯ
Аналіз сили зв'язку та його напряму	Кореляційний аналіз
Аналіз форми зв'язку, передбачення змін	Регресійний аналіз
Причинно-наслідковий аналіз	Методи статистичного висновку у поєднанні психологічним експериментом

Будь-який висновок неможливий без попереднього висунення гіпотези. Саме від того, наскільки правильно та грамотно ми сформулюємо гіпотезу, і залежатиме правильність наших висновків.

ПСИХОЛОГІЧНА І СТАТИСТИЧНА ГІПОТЕЗА

Перш за все необхідно з'ясувати, що ж ми розуміємо під гіпотезою.

Гіпотеза – це висловлювання, істинність чи хибність якого не відома, але може бути встановлена експериментально.

Виявляється, що гіпотези можуть бути двох рівнів. Перший рівень – експериментальна психологічна гіпотеза, другий рівень – статистична гіпотеза. Власне, над методами перевірки статистичних гіпотез ми і будемо працювати. Однак, щоб зрозуміти їх особливість, варто також розглянути психологічні гіпотези, які є предметом експериментальної психології.

Психологічна гіпотеза – це дійсно певне висловлювання, яке можна перевірити дослідним шляхом. Загалом, вона формулюється як теорема. Формулювання психологічної гіпотези – справжній творчий акт, який вимагає високого рівня знань та досвіду від науковця.

Статистична гіпотеза – це просте твердження відносно невідомого параметра. Статистичну гіпотезу позначають буквою Н, і записують так – (Н: r=0). Твердження в дужках означає, що висунута статистична гіпотеза відносно рівності нулю певного параметра.

Відношення між статистичною гіпотезою та психологічною гіпотезою можна зобразити так (рис.1.):

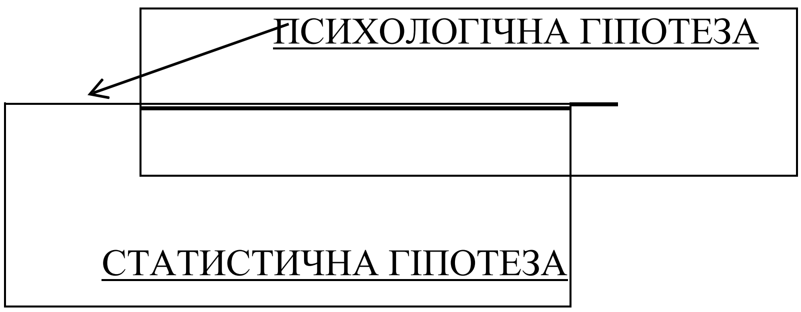


Рис. 1. Психологічна та статистична гіпотези

На рисунку зображено, що психологічна та статистична гіпотези знаходяться у відношенні підпорядкування – статистична гіпотеза формулюється на основі психологічної гіпотези. Водночас, зображені два поля не співпадають не всі психологічні гіпотези можна перевірити статистичними методами, і не всі статистичні гіпотези мають науковий інтерес для психології.

Які ж бувають статистичні гіпотези?

Статистичні гіпотези поділяють на два типи: нульову та альтернативну.

Нульова гіпотеза – це гіпотеза про відсутність відмінностей. Вона позначається $\mathbf{H_0}$ і називається нульовою тому, що містить 0: X_1-X_2=0, де X_1 та X_2 – показники, між якими з'ясовують відмінність.

Альтернативна гіпотеза – це гіпотеза про існування та значимість відмінностей. Позначається $\mathbf{H_1}$. Альтернативна гіпотеза – це те, що ми в більшості випадків хочемо довести.

Наприклад, для психологічної гіпотези (П1) про зв'язок між творчістю та тривожністю можна сформулювати дві протилежні гіпотези:

H_0 – у досліджуваних відсутній зв'язок між рівнями творчості та тривожності,

H_1 – у досліджуваних існує значимий зв'язок між рівнями творчості та тривожності.

Яку з гіпотез прийняти, залежатиме від результатів дослідження. Приміром, ми підтвердили гіпотезу **H_1.**

Наступним кроком треба з'ясувати, що на що впливає – творчість на тривожність, чи тривожність на творчість?

Для цього необхідно вже не просто кореляційне дослідження, а реальний експеримент. Для його проведення можна сформулювати ще дві ПСИХОЛОГІЧНІ гіпотези:

П2 – рівень тривожності впливає на рівень творчості,

П3 – рівень творчості впливає на рівень тривожності.

СТАТИСТИЧНІ ГІПОТЕЗИ для П2:

H_0 – після штучного підвищення рівня тривожності рівень творчості у досліджуваних не зміниться,

H_1 – після штучного підвищення рівня тривожності рівень творчості у досліджуваних значимо зміниться.

СТАТИСТИЧНІ ГІПОТЕЗИ для П3:

Н0 – після навчання досліджуваних творчим стратегіям діяльності рівень тривожності у досліджуваних не зміниться,

Н1 – навчання досліджуваних творчим стратегіям діяльності рівень тривожності у досліджуваних значимо зміниться.

У результаті статистичного аналізу можна зробити висновок, яка з гіпотез підтверджується, а яка відкидається. Загалом структуру такого дослідження можна зобразити так (рис.2.):

П

Існує зв'язок між тривожністю та творчістю

С

H_0: немає зв'язку

H_1: є значимий зв'язок

М

Кореляційний аналіз

H_1: є значимий зв'язок

П

Тривожність впливає на творчість

С

H_0: немає змін

H_1: є зміни

М

Експеримент та методи статистичного висновку

H_0: немає змін

П

Тривожність впливає на творчість

С

H_0: немає змін

H_1: є зміни

М

Експеримент та методи статистичного висновку

H_1: є зміни

Рис.2. Процес побудови гіпотез в експериментальному дослідженні

Отже, з’ясовано, що рівень творчості впливає на рівень тривожності. Однак, у справжніх дослідників з’явиться питання – який напрямок цього впливу (рівень творчості призводить до зниження чи до підвищення рівня тривожності)? Для з’ясування цього питання розглянемо ще одну класифікацію гіпотез.

НАПРАВЛЕНІ І НЕНАПРАВЛЕНІ СТАТИСТИЧНІ ГІПОТЕЗИ

Гіпотези можуть бути направлені і ненаправлені.

Приклад **ненаправленої гіпотези** ми розглянули в попередньому питанні. Це гіпотези типу:

H0: X1 не відрізняється від X2
H1: X1 відрізняється від X2

$П_3$ | Творчість впливає на тривожність

С | H_0: немає змін у тривожності після впливу | H_1: є зміни у тривожності після впливу

Рис. 3. Приклад ненаправленої статистичної гіпотези

Однак, існують і направлені гіпотези, які виглядають так:

H_0: X_1 не перевищує X_2
H_1: X_1 перевищує X_2

У такому контексті статистичні гіпотези відносно ПЗ **виглядали б так** (рис. 4)**:**

$П_3$	Творчість впливає на тривожність	
С	H_0: тривожність після впливу не перевищує тривожність до впливу	H_1: тривожність після впливу значимо перевищує тривожність до впливу

Рис. 4.Приклад направленої статистичної гіпотези

Класифікація статистичних гіпотез

СТАТИСТИЧНІ ГІПОТЕЗИ

Направлені Ненаправлені

Нульова Альтернативна Нульова Альтернативна

Рис. 5. Класифікація статистичних гіпотез

ОСОБЛИВОСТІ ПЕРЕВІРКИ СТАТИСТИЧНОЇ ГІПОТЕЗИ

Перевірка статистичних гіпотез здійснюється за допомогою СТАТИСТИЧНИХ КРИТЕРІЇВ.

Статистичний критерій – це метод обчислення, який дозволяє прийняти істинну та відхилити хибну статистичну гіпотезу.

Статистичні критерії є **параметричними** та **непараметричними**.

Параметричні критерії включають в себе параметри розподілу (середнє арифметичне та дисперсію) і дають достовірні результати, коли дані розподілені нормально. Вони можуть бути використані до великих вибірок.

Непараметричні критерії не включають параметрів розподілу, а ґрунтуються на оперуванні частотами чи рангами, а тому можуть бути використані до малих

Особливістю перевірки статичних гіпотез є те, що рішення дослідника ніколи не приймається з повною впевненістю – він завжди припускає ризик прийняття неправильного висновку.

Цей ризик іманентно властивий будь-якому психологічному дослідженню, і причину його можна знайти в таких поняттях як вибірка та генеральна сукупність.

Хоча дослідник робить все від нього залежне, щоб структура вибірки досліджуваних відображала структуру генеральної сукупності, на яку результати дослідження будуть поширені, повністю цього ніколи досягти не вдається. Це відображається у такому понятті, як рівень статистичної значимості (або ймовірність помилки при перенесенні результатів дослідження вибірки на генеральну сукупність).

Так, якщо ми хочемо з'ясувати вплив творчості на тривожність, ми не можемо дослідити всіх людей – мають бути представлені всі вікові категорії, всі класові прошарки, всі професії, всі культури. Тому дослідник обмежується дослідженням якоїсь однієї категорії, з якої він обирає вибірку – це можуть бути, наприклад, учні молодших класів. Але й тоді виникає ряд проблем – всього в Україні може бути 200 000 учнів, а дослідити ми можемо всього 200!!!

Саме цим і обумовлений той факт, що рішення про існування чи відсутність певної закономірності завжди приймається з урахуванням можливості помилки.

Фактично, визначити цю можливість і покликані методи статистичного висновку, а максимально її знизити – експериментальні методи планування і проведення експерименту.

Помилка I та II роду
та рівень значимості статистичного критерію

В процесі статистичного висновку завжди існує ймовірність помилки.

Помилки можна класифікувати. Виділяють помилки двох типів:

- ✓ Помилка I роду.
- ✓ Помилка II роду.
- ✓ Розглянемо **помилку I роду**.

> **Помилка I роду** полягає у відхиленні нульової гіпотези, тоді як вона виявляється правильною.

Ймовірність помилки I роду позначається α. Відповідно, ймовірність правильного рішення: 1– α. Відповідно, чим менше α, тим більша ймовірність правильного рішення.

Історично склалося так, що виділяють три рівні статистичної значимості критерію, який визначається співвідношенням його експериментального та критичного значення (табл.2.).

Таблиця 2

РІВНІ СТАТИСТИЧНОЇ ЗНАЧИМОСТІ	**СПОСІБ ВИЗНАЧЕННЯ**
0,05 (мінімальний)	Аналіз співвідношення експериментального (отриманого в результаті обчислень експериментальних результатів) та критичного (отриманого з статистичних таблиць) значень того чи іншого статистичного критерію.
0,01 (середній)	
0,001 (максимальний)	

ПОМИЛКА ІІ РОДУ
ТА ПОТУЖНІСТЬ СТАТИСТИЧНОГО КРИТЕРІЮ

Інший варіант помилки – помилка ІІ роду.

Помилка ІІ роду полягає у прийнятті нульової гіпотези, тоді як вона виявляється неправильною.

Ймовірність помилки ІІ роду позначають β. А величину 1 – β називають потужністю критерію.

Потужність критерію визначають емпіричним шляхом. Одна й та ж задача може бути вирішена різними критеріями, при цьому виявляється, що деякі критерії можуть виявити відмінності там, де інші їх не бачать. Звісно, можна поставити питання – навіщо використовувати менш потужні критерії?

Проблема в тому, що **на вибір критерію впливають** не лише його потужність, а й ряд інших факторів:

1. простота обчислень,
2. діапазон використання (обсяг вибірки, тип шкали),
3. застосовність до вибірок з неоднаковими обсягами,
4. інформативність результатів (односторонні та двосторонні критерії).

Узагальнюючи, можна об'єднати типи помилок у таку таблицю (табл.3.):

Таблиця 3.

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ</td></tr>
<tr><td>H0 правильна</td><td>H0 неправильна</td></tr>
<tr><td rowspan="2">РІШЕННЯ</td><td>Відхилити H0</td><td>Помилка I роду (ймовірність α)</td><td>Правильне рішення (ймовірність 1 – β)</td></tr>
<tr><td>Прийняти H0</td><td>Правильне рішення (ймовірність 1 – α)</td><td>Помилка II роду (ймовірність β)</td></tr>
</table>

Тема. Порівняльний аналіз залежних вибіркових даних

Для порівняння двох залежних (парних) вибірок використовується парний t-критерій Стьюдента. Залежними є вимірювання, виконані у одних і тих же учасників до і після експерименту (повторні вимірювання). При цьому для застосування вказаного критерію необхідно, щоб вихідні дані мали нормальний розподіл.

Парний t-критерій Стьюдента розраховується за формулою

$$t = \frac{M_d}{\sigma_{d/} / \sqrt{n}},$$

де M_d – середнє значення різниці показників, виміряних до і після, $\sigma_{d/}$ – середнє квадратичне відхилення різниці показників, n – число учасників експерименту.

Інтерпретація отриманого значення парного t-критерію Стьюдента не відрізняється від оцінки t-критерію для незв'язаних сукупностей. Перш за все, необхідно знайти число ступенів свободи $df = n$-2 для рівня значущості α=0,05. Якщо розраховане значення парного t-критерію Стьюдента дорівнює або більше критичного, робимо висновок про статистичну значущість відмінностей між порівнюваними величинами, в іншому випадку – статистично не значущими.

Тема. Порівняльний аналіз незалежних вибіркових даних

Критерій Стьюдента спрямований на оцінку різниці величин середніх значень двох вибірок, які розподілені за нормальним законом. Одним з головних достоїнств критерію є широта його застосування. Він може бути використаний для порівняння середніх залежних та незалежних вибірок, причому вибірки можуть бути не рівними за величиною.

Таким чином, для порівняння двох незалежних вибірок, які підпорядковуються нормальному закону розподілу, використовується t-критерій Стьюдента.

Розрахунок t-критерію Стьюдента для незалежних вибіркових даних виконується за допомогою формули

$$t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} - \frac{s_2^2}{n_2}}},$$

де $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ – вибіркові середні, виміряних до і після, s_1, s_2 – стандартні відхилення, n_1, n_2 – обсяги вибірок.

Зауваження! Незалежними є вимірювання, виконані у різних груп учасників експерименту на однаковому його етапі.

Тема. Критерій Манна-Уітні

Критерій Манна-Уітні являє непараметричних альтернативу t-критерію для незалежних вибірок. Перевага його полягає в тому, що ми відмовляємося від припущення нормальності розподілу і однакових дисперсій. Необхідно, щоб дані були виміряні як мінімум у порядковій шкалі.

Метод засновано на визначенні того, чи достатньо мала зона значень між двома варіаційними рядами, які перехрещуються. Чим менше значення критерію, тим імовірніше, що відмінності між значеннями параметра в вибірках суттєві.

U-критерій Манна-Уіні є непараметричним критерієм, тому, на відміну від t-критерію Стьюдента, не вимагає наявності нормального розподілу порівнюваних сукупностей.

U-критерій підходить для порівняння малих вибірок: в кожної з вибірок має бути не менше 3 значень ознаки.

Допускається, щоб в одній вибірці було 2 значення, але в другій тоді має бути не менше п'яти.

Умовою для застосування U-критерію Манна-Уітні є відсутність в порівнюваних групах співпадаючих значень ознаки (всі числа – різні) або дуже мале число таких збігів.

Тема. Критерій Вілкоксона

Критерій Вілкоксона застосовується для зіставлення показників, виміряних в двох різних умовах на одній і тій же вибірці випробуваних.

Цей критерій можна застосувати в тих випадках, коли ознаки виміряні принаймні у порядковій шкалі, і зрушення між другим і першим вимірами теж можуть бути впорядковані. Для цього вони повинні варіювати в досить широкому діапазоні. В принципі, можна застосовувати Т - критерій Вілкоксона і в тих випадках, коли зрушення приймають тільки три значення: -1, 0 і +1, але тоді критерій Т навряд чи додасть щось нове до тих висновків, які можна було б отримати з допомогою критерію знаків. Ось якщо зрушення змінюються, скажімо, від -30 до +45, тоді має сенс їх ранжувати й потім підсумовувати ранги.

Застосування методу передбачає, що типовим зсувом буде зрушення в напрямку, який більш часто зустрічається, а нетиповим – зрушення в більш напрямку, який зустрічається рідко.

Головними обмеженнями є мінімальна кількість випробовуваних, які пройшли вимірювання в двох умовах – це 5 осіб. Максимальна кількість випробовуваних – 50 осіб, що диктується верхньою межею наявних таблиць.

Тема. Застосування кутового φ-критерію Фішера

У психологічних дослідженнях застосовують ряд критеріїв, кожен з яких має власні умови застосування та обмеження. На значну увагу заслуговують багатофункціональні критерії, які можуть бути використаними для вирішення кількох типів завдань. Їх універсальність пов'язана з тим, що вихідні дані можуть бути виміряними у будь-якій шкалі, включаючи номінативну, вибірки можуть бути залежними або незалежними, вибірки можуть бути невеликими за обсягом. Одним із таких критеріїв є кутовий φ-критерій Фішера.

Кутовий φ-критерій Фішера призначений для зіставлення двох вибірок (незалежних або зв'язаних) по частоті проявленого ефекту. Він дозволяє оцінити відмінності між частками обох вибірок, в яких ефект проявився. Гіпотеза H_0 полягає у тому, що частка випробовуваних, у яких виявився досліджуваний ефект, у вибірці 1 не більше, ніж у вибірці 2.

φ-критерій Фішера називають кутовим, оскільки в ньому вихідна частка, нормована на одиницю (Р), перекладається в величину кута, нормованого на величину $\pi = 3,14$.

Іншими словами, частці «є ефект» ставиться у відповідність кут в інтервалі від 0° до 180°; За експериментальними даними, необхідно визначити частки вибірок P_1 і P_2, за якими обчислюють кути φ_1 і φ_2, а потім знаходять експериментальне значення φ-критерію

Обмеження застосовності φ-критерію Фішера:

1) жодна з часток не повинна бути рівною 0;

2) верхня межа обсягу вибірки відсутня, а нижні межі встановлюються відповідно до наступних правил:

- ✓ $n_1 = 2$, $n_2 \geq 30$;
- ✓ $n_1 = 3$, $n_2 \geq 7$;
- ✓ $n_1 = 4$, $n_2 \geq 5$;
- ✓ при n_1, $n_2 \geq 5$ можливі будь-які зіставлення.

Алгоритм аналізу таблиці спряженості:

I Внесемо початкові дані у таблицю MS Excel 2Х2.

II За допомогою користувацької формули, розрахуємо відносну частоту.

III Обчислимо значення кутів φ_1 і φ_2 за формулою:

$$\varphi = 2 \cdot \arcsin \sqrt{P}$$

IV Обчислимо емпіричне значення кута φ за формулою:

$$\varphi_{емп} = |\varphi_1 - \varphi_2| \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}} ,$$

де n_1, n_2 – обсяги вибірок.

V Отримане значення порівняємо з критичним значенням $\varphi_{кр}$ для заданого рівня значущості α.

Якщо розраховане значення критерію більше критичного, гіпотеза про відсутність статистично значущих відмінностей між частками відхиляється і відмінності вважають статистично значущими на обраному рівні значущості.

Глосарій

Випадкова величина – це величина, яка приймає різні числові значення під впливом випадкових обставин. Наприклад, кількість перемог у командному заліку, кількість потраплянь баскетбольного м'яча у корзину за гру.

Дискретна випадкова величина – це випадкова величина, що приймає тільки певні, відокремлені один від одного значення, які можна встановити і перерахувати. Наприклад, число гравців у команді, частота серцевих скорочень, кількість підтягувань на перекладині.

Неперервна випадкова величина – це випадкова величина, що може приймати будь-які значення всередині деякого інтервалу. Наприклад, довжина тіла людей, їх маса тіла.

Змінна – характеристика об'єкта, який досліджують чи вимірюють.

Шкала – це сукупність усіх можливих значень ознаки.

Номінальна шкала містить категорійні змінні, значення яких не можуть бути впорядкованими. Іншими словами, номінальна шкала складається з назв, які дають змогу розрізняти лише значення ознаки (стать, спортивний розряд).

Порядкова шкала – це шкала, значення якої за означенням упорядковані і їх можна порівнювати. У порядковій шкалі можна визначити, які її значення більші, а які менші (рівень фізичної підготовленості – високий, середній і т.д.).

Числова шкала – це шкала, за якою вимірюються ознаки, що мають числову природу. Вона включає інтервальну шкалу та шкалу відношень.

Зауваження! Будь-яка числова шкала є порядковою, тому що з двох різних чисел можна визначити більше число. Проте, якщо рівні порядкової шкали задають числами («високий рівень» - 5 балів, «достатній» - 4 бала і т.д.), то числа є синонімами значень порядкової шкали. У числових же шкалах значення вимірюють за певним еталоном, наприклад, довжина тіла людини вимірюється у см, а еталоном є 1 см.

Інтервальна шкала – значення змінної впорядковані як у порядковій шкалі, але відмінності між значеннями є кількісними (температура за Цельсієм, тиск, часові інтервали і т.д.).

Шкали відношень – шкала вимірювань кількісної властивості, змінні якої окрім усіх властивостей, що й інтервальні, мають нульову точку відліку (вік, температура за Кельвіном і т.д.).

Дискретні ознаки мають лише окремі цілочислові значення (кількість перемог у сезоні, кількість підтягувань).

Неперервні ознаки мають будь-які значення в певних межах варіації (довжина тіла, артеріальний тиск).

Вибіркове спостереження — такий вид несуцільного спостереження, при якому обстежуються не всі елементи сукупності, що вивчається, а лише певним чином дібрана їх частина.

Генеральна сукупність – це повний набір однорідних досліджуваних об'єктів (різних груп населення), які характеризуються певними якісними або кількісними ознаками.

Вибіркова сукупність (вибірка) – типовий і основний об'єкт аналізу даних, де результат обробки виділеної з генеральної сукупності вибірки розповсюджується на генеральну сукупність.

Об'єм вибірки – число одиниць (елементів) сукупності даних (учасників експерименту). Об'єм генеральної сукупності позначають N, а об'єм вибіркової сукупності – n.

Проста випадкова вибірка – це вибірка, отримана поступовим вибором окремих елементів по одному з генеральної сукупності, при якому кожен з них має однакові шанси бути відібраним.

Зауваження! Вимога випадковості забезпечується відбором за таблицями випадкових чисел, за жеребом чи за певним суб'єктивним правилом (типу «кожен десятий три кроки вперед»).

Випадкова без повторна – це вибірка, отримана шляхом вилучення у вибірку елементу і його реєстрації.

Випадкова повторна вибірка – це вибірка, отримана шляхом вилучення у вибірку елементу і його поверненню до генеральної сукупності після реєстрації.

Закон розподілу випадкової величини – це відповідність між можливими значеннями цієї величини і їх ймовірностями.

Асиметрія (А) – це показник, що відображає міру скошеності кривої розподілу емпіричних даних у порівнянні з диференціальною функцією нормального розподілу.

Ексцес (Е) – показник, що відображує наявність піку кривої розподілу в порівнянні з диференціальною функцією нормального розподілу.

Стандартне відхилення *s* – це показник розсіювання, який характеризує розкид варіант навколо їх середнього вибіркового значення.

Таблиця спряженості називається прямокутна таблиця, по рядках якої вказуються категорії однієї ознаки, а по стовпцях – категорії іншої.

Маргінальні суми по рядках утворює стовпець, у якому внесено суми кожного із рядків таблиці спряженості.

Маргінальні суми по стовпцях утворює нижній ряд таблиці спряженості, у якому внесено суми кожного із стовпців таблиці спряженості.

Тренд – загальна довготермінова тенденція зміни даних в залежності від значень факторів впливу чи часу, на формальному рівні синонім регресії.

Лінія тренду – синонім лінії регресії.

Експерти – це особи, які володіють знаннями і здатні висловити аргументовану думку щодо досліджуваного явища**.**

Експертиза – процедура отримання оцінок від експертів.

Гіпотеза – це: а) припущення про вид невідомого закону розподілу досліджуваної експериментально випадкової величини (непараметрична гіпотеза); б) припущення про значення характеристик (параметрів) відомого розподілу (параметрична гіпотеза).

Нульова гіпотеза H_0 – це висунута гіпотеза.

Альтернативна гіпотеза H_1 – це гіпотеза, яка несумісна з нульовою.

Статистичний критерій – це правило, яке дозволяло б за наявними статистичними даними (за вибіркою) прийняти рішення про відповідність або невідповідність висунутої гіпотези цим даними.

Критична область – це сукупність значень критерію K, при яких нульову гіпотезу (H_0) відхиляють.

Помилка першого роду полягає в тому, що з імовірністю α відхиляється правильна гіпотеза H_0.

Помилка другого роду полягає в тому, що буде прийнята гіпотеза H_0, в той час як вона не вірна.

Кореляційна залежність – це залежність між випадковими величинами X і Y, якщо вона існує.

Список використаної літератури

1. Омецинська Н.В., Бишевець Н.Г., Юсипів Т.В. Костіна Т.О. Практичне застосування методів математичної статистики в психології та соціології засобами табличного процесора MS Excel: Навч. посібник. вид-во Олді Плюс, 2025. 161 с
2. Климчук В.О. Математичні методи в психології. Навчальний посібник для студентів психологічних спеціальностей. – К. : Освіта України, 2009. – 288 с.
3. Климчук В.О. Кластерний аналіз: використання у психологічних дослідженнях // Практична психологія та соціальна робота. – 2006. – №4. – С. 30-36. 51.
4. Телейко А.Б. Математико-статистичні методи в соціології та психології: Навч. посіб. / А.Б. Телейко, Р.К. Чорней. – К.: МАУП. 2007. -421с.